Тема 4. Экспоненциальный закон распределения наработки

Экспоненциальное распределение – распределение вероятностей непрерывной случайной величины *t*, которая может принимать любые значения от 0 до +∞ и плотность распределения которой

$$f(t) = \rho e^{-\rho t} \qquad (2.35)$$

при $t \geq 0$ и параметре $\rho = b^{-1}$, где b – параметр масштаба.

Для экспоненциального распределения (рисунок 2.11) интенсивность отказов случайной величины определяется как $\lambda(t)=\rho=b^{-1}$, ее математическое ожидание $\mu_t=\rho^{-1}=b$, а дисперсия $D=\sigma^2=\rho^{-2}=b^2$.

Экспоненциальное распределение используют в тех случаях, когда элемент не стареет, т.е. его остаточное время жизни не зависит от того, сколько времени он проработал до рассматриваемого момента времени.

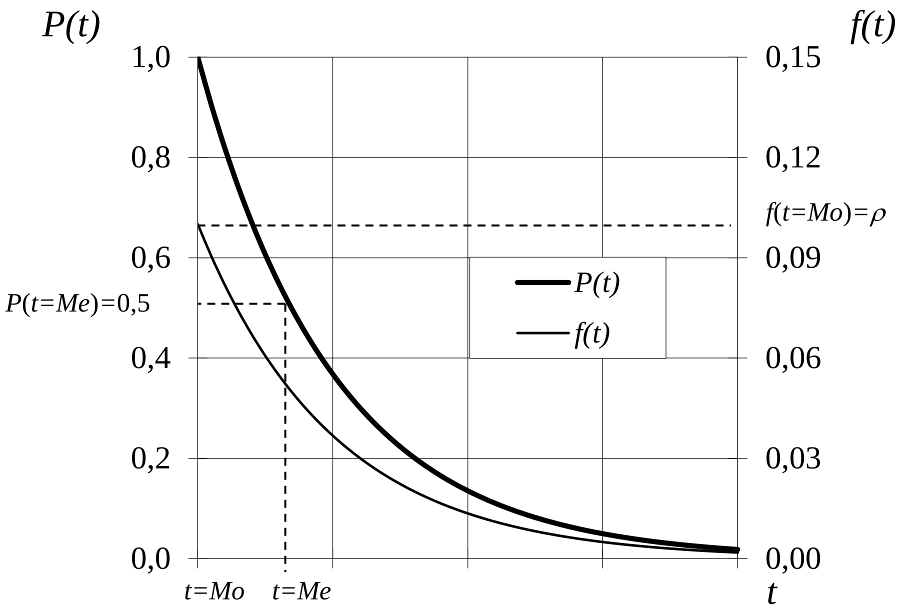

Рисунок 2.11 – Экспоненциальное распределение

Гамма-распределение – распределение вероятностей непрерывной случайной величины *t*, которая может принимать любые значения от 0 до + ∞ и плотность вероятности которой

$$f(t) = \frac{t^{m-1}\exp(-\frac{t}{\alpha})}{\alpha^m \Gamma(m)} \tag{2.36}$$

при $t \geq 0$ и параметрах $m>0$, $\alpha>0$;

Г(*) – гамма-функция

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-t} t^{m-1} dt\,. \tag{2.37}$$

Следует отметить, что:

1) При m целом имеем $\Gamma(m) = (m-1)!$

2) Параметр m определяет форму распределения. При m=1 гамма-распределение превращается в экспоненциальное распределение.

3) Сумма m независимых случайных величин, подчиняющихся экспоненциальному закону распределения с параметром $\rho = \alpha^{-1}$, – это гамма-распределение с параметрами m и α.

Математическое ожидание гамма-распределения имеет вид $\mu_t = m\rho^{-1} = m\alpha$, а его дисперсия $D = \sigma^2 = m\rho^{-2} = m\alpha^2$.

Гамма-распределение используют в тех случаях, когда элемент не стареет, т.е. его остаточное время жизни не зависит от того, сколько времени он проработал до рассматриваемого момента времени.

Распределение χ^2 – распределение вероятностей непрерывной случайной величины, принимающей значения от 0 до +∞, плотность распределения вероятностей которой

$$f(\chi^2; \mathrm{v}) = \frac{(\chi^2)^{\frac{\mathrm{v}}{2}-1}}{2^{\frac{\mathrm{v}}{2}}\Gamma(\frac{\mathrm{v}}{2})} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \tag{2.38}$$

где $\chi^2 \geq 0$ при значении параметра v=1, 2, …;

Г(*) – гамма-функция.

Следует при этом отметить:

1) Сумма квадратов v независимых стандартизованных нормальных случайных величин образует случайную величину χ^2 с параметром v; v называют степенью свободы случайной величины χ^2.

2) Распределение вероятностей случайной величины $\chi^2/2$ – это гамма-распределение с параметром m = ν/2.

t-распределение / *распределение Стьюдента* – распределение вероятностей непрерывной случайной величины, плотность распределения вероятностей которой

$$f(t;\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right)\left(\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}\right), \tag{2.39}$$

где $-\infty<t<+\infty$ с параметром ν=1, 2, ...;

Γ(*) – гамма-функция.

При этом отношение двух независимых случайных величин, числитель которого – стандартизованная нормальная случайная величина, а знаменатель – положительное значение квадратного корня из частного от деления случайной величины χ^2 на ее число степеней свободы ν – это распределение Стьюдента с ν степенями свободы.

F-распределение – распределение вероятностей непрерывной случайной величины, принимающей значения от 0 до + ∞, плотность распределения вероятностей которой

$$f(F;\nu_1,\nu_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}(\nu_1)^{\frac{\nu_1}{2}}(\nu_2)^{\frac{\nu_2}{2}}\frac{F^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_1 F+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, \tag{2.40}$$

где $F \geq 0$ с параметрами ν_1 = 1, 2, ...; ν_2 = 1, 2, ...;

Γ(*) – гамма-функция.

Это распределение отношения двух независимых случайных величин с распределениями χ^2, в котором делимое и делитель разделены на свои числа степеней свободы. Число степеней свободы числителя равно ν_1, а знаменателя – ν_2. В таком порядке и записывают числа степеней свободы случайной величины с распределением F.

Бета-распределение – распределение вероятностей непрерывной случайной величины t, которая может принимать любые значения от 0 до 1, включая границы, и плотность распределения которой

$$f(t)=\frac{\Gamma(m_1+m_2)}{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}t^{m_1-1}(1-t)^{m_2-1} \qquad (2.41)$$

при $0 \le t \le 1$ и параметрах $m_1>0$, $m_2>0$,
где Γ – гамма-функция.
При $m_1=m_2=1$ бета-распределение переходит в равномерное распределение с параметрами $a=0$ и $b=1$.
Распределение Гумбеля / распределение экстремальных значений типа I – распределение вероятностей непрерывной случайной величины t с функцией распределения

$$F(t)=\exp\left(-e^{-y}\right), \qquad (2.42)$$

где $-\infty < t < +\infty$; $y=(t-c)/a$; параметры $-\infty < c < +\infty$, $a > 0$.
Распределение Фрешэ / распределение экстремальных значений типа II – распределение вероятностей непрерывной случайной величины t с функцией распределения

$$F(t)=\exp\left(-y^{-b}\right), \qquad (2.43)$$

где $t \ge c$; $y=(t-c)/a$; а параметры $-\infty<c<+\infty$, $a > 0$, $b > 0$.
При этом параметр b определяет форму распределения.

В тех случаях, когда плотность распределения отказа имеет несимметричный вид, используют распределение Вейбулла (рисунок 2.12).